

Programme de colle n°20

semaine du 9 au 13 mars

Notions vues en cours

Chapitre 26 : Développements limités (suite)

- Obtention d'équivalents à partir d'un DL avec un premier terme non nul, calcul de limites en utilisant les DL
- Avec un DL, étude du signe local d'une fonction (notamment de $f(x) - f(a)$ pour vérifier si a est un extremum local), obtention de l'équation d'une tangente et position relative de la courbe par rapport à sa tangente
- Conditions d'optimalité du second ordre : conditions nécessaires, conditions suffisantes
- Échelle de comparaison, développement asymptotique (DA) en un point a de $\overline{\mathbb{R}}$, DA à n termes, ou à une précision $g(x)$ avec n dans $\mathbb{N}^*$ et g une fonction donnée
- Asymptote oblique en $\pm\infty$: définition, position relative d'une courbe par rapport à son asymptote
- (Vu en exercice :) développement asymptotique d'une suite implicite, d'une fonction implicite

Chapitre 26 : Espaces vectoriels

- $\mathbb{K}$ -espace vectoriel : définition, le vecteur nul est noté 0_E , règles de calcul avec $0_{\mathbb{K}}, 0_E$, la loi $-$
- Liste des e.v. usuels :
 - $\mathbb{K}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
 - $\mathbb{K}^\Omega$ avec Ω un ensemble quelconque (notamment $\Omega \subset \mathbb{N}$ pour des suites ou $\Omega \subset \mathbb{R}$ pour des fonctions)
 - $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ avec $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$
 - $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
 - $\mathbb{K}[X]$
 - $\mathbb{K}(X)$
- Espace vectoriel produit $E_1 \times \cdots \times E_n$
- Combinaison linéaire d'une famille *finie* de vecteurs (les CL de familles infinies seront vues ultérieurement)
- Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation, s.e.v. triviaux, stabilité par intersection (finie ou infinie)

Les questions de cours sont en page suivante

Questions de cours

Question Flash. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examineur, sur laquelle on doit passer un temps minimal. Cette question est choisie parmi celles ci-dessous, après les questions longues (chapitres **22 à 24**).

Question Longue. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont exigibles. Les énoncés des théorèmes doivent être clairement... énoncés !*

1. Conditions d'optimalité du second ordre : énoncé uniquement. Enfin, donner la liste des e.v. usuels (cf première page). Chapitre 26, Théorème 26.19
2. Définition d'un espace vectoriel, puis sans démonstration : une caractérisation pour qu'un ensemble soit un s.e.v. (on ne demande pas la définition d'un s.e.v.). Enfin, donner la liste des e.v. usuels (cf première page). Chapitre 27, Définition 27.2 et Théorème 27.9 (ou 27.10)
3. L'intersection d'une famille (finie ou infinie) de s.e.v. est un s.e.v. Chapitre 27, Théorème 27.13

Questions Flash au programme :

Chapitre 24 :

- Rappeler le théorème de d'Alembert-Gauss.
- Quels sont les polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$? et sur $\mathbb{R}$?
- Donner la forme de la factorisation d'un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, en précisant le rôle de chaque variable
- Donner la forme de la factorisation d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, en précisant le rôle de chaque variable
- Qu'appelle-t-on un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$? et scindé à racines simples ?
- En termes de racines, donner une condition nécessaire et suffisante pour que $P \wedge Q = 1$
- Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $a \neq 0$, dont on note α, β, γ les racines complexes. Donner les relations coefficients-racines.
- Quelle structure algébrique possède l'ensemble $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles ?
- Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. Que doit-on vérifier pour que F soit irréductible ?
- Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. Que vaut $\deg(F)$? Dans quel ensemble prend-il ses valeurs ?
- Quelle est la définition d'un pôle d'une fraction rationnelle $\frac{A}{B}$? et d'une racine ?
- Donner la forme de la DES sur $\mathbb{R}(X)$ ou sur $\mathbb{C}(X)$ pour une fraction rationnelle donnée par l'examineur (*le dénominateur étant déjà factorisé ou facile à factoriser, et la division euclidienne n'étant pas nécessaire*).

Chapitre 23 :

- Rappeler la définition de " P et Q sont associés"
- Si $B \mid A$ dans quel cas peut-on dire que $\deg B \leq \deg A$? Que peut-on dire de plus si $\deg B = \deg A$?
- Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Si $A \mid B$ et $B \mid A$, que peut-on dire ?
- Énoncer le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$
- Rappeler la relation de Bézout (ou théorème de Bézout-Bachet) pour des polynômes
- Rappeler le théorème de Bézout pour des polynômes
- Que peut-on dire des polynômes AB et $(A \vee B)(A \wedge B)$?
- Compléter : α est une racine de P ssi divise P

- Donner deux caractérisations de “ α est racine de multiplicité exactement m ” : une avec une relation de divisibilité, une qui fait intervenir P et ses dérivées.
- Donner deux caractérisations de “ α est racine de multiplicité au moins m ” : une avec une relation de divisibilité, une qui fait intervenir P et ses dérivées.
- Quel lien existe-t-il entre le degré d'un polynôme et son nombre de racines (comptées avec multiplicité) ?

Chapitre 22 :

- Écrire la forme développée (avec un signe $\sum$) d'un polynôme P tel que $\deg P \leq n$ ($n \in \mathbb{N}$). Donner une CNS (condition nécessaire et suffisante) pour avoir $\deg P = n$.
- Donner les formules des degrés de $P + Q$ et de PQ
- Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k$. Compléter la formule : $PQ = \sum_{k=0}^{\dots} c_k X^k$ avec $c_k = \dots$
- Que peut-on dire du degré de $P \circ Q$ si Q est constant ? et si Q est non constant ?
- Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Compléter la formule : $P' = \sum_{k=0}^{\dots} (\dots) X^k$
- Énoncer la formule de Taylor pour un polynôme P